Chapitre1 : Rappels et Compléments de Mathématiques

I - Notion fondamental du calcul vectoriel

1. Modéliser Représenter

Pour décrire un phénomène ou un système physique, on doit :

• **Déterminer les paramètres, les grandeurs,** caractérisant au mieux l'état ou l'évolution du système.

• **Préciser la nature des grandeurs** considérées. Il peut s'agir de :

- Grandeurs locales c'est-à-dire définies par leur valeur en chaque point.
- Grandeurs globales, caractérisant un domaine ou la totalité du système (par exemple son énergie).

Ces grandeurs peuvent être :

- Des scalaires ou nombres (densité de masse ou de charge, température ...) qui sont parfaitement définies par leur mesure avec une unité donnée.
- Des vecteurs (on pourra définir un champ de gravitation, un champ électrique, un gradient de pression), qui nécessitent en plus de leur mesure la connaissance de leur sens leur direction.

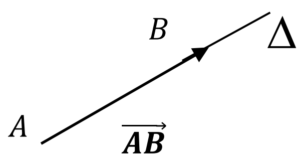
2. Vecteur :

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un segment de droite AB orienté défini par son origine : point d'application A, l'autre point B étant l'extrémité.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est définit par :

Son point origine A, son extrémité B

- Sa direction : support portant le segment $[AB]$
- Son intensité (norme, module) : distance entre A et B
- Son sens de A vers B.



Deux vecteurs sont égaux s'ils possèdent la même direction, le même sens, et le même module.

3. Base d'un espace vectoriel :

Soit $B(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une famille de trois vecteurs libres non nuls, B est une base de l'espace vectoriel si quel que soit le vecteur $\vec{u}$ on peut l'écrire sous la forme : $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

a, b et c sont les composantes de $\vec{u}$ sur la base B ; la base est orthonormé si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont normés et deux à deux orthogonaux. La norme de $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

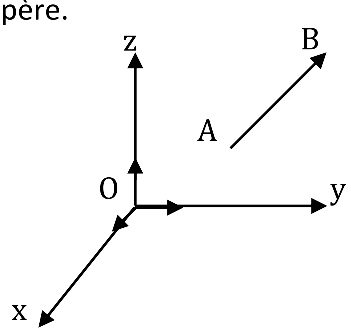
4. Repère orthonormé

L'ensemble formé par un point O et une base $B(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ constitue un repère noté $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les demi-droites Ox, Oy, Oz, sont les axes du repère.

La distance entre 2 points A et B dans R est :

$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$

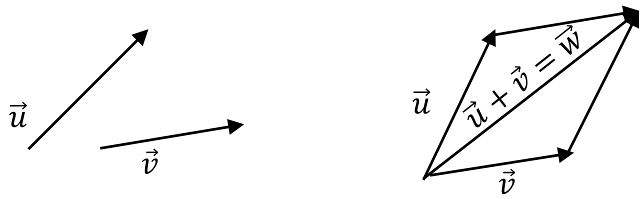
$$\overrightarrow{AB} = \sum_{i=1}^{3}(b_i - a_i)\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(bi - ai)^2}$$



5. Opérations sur les vecteurs

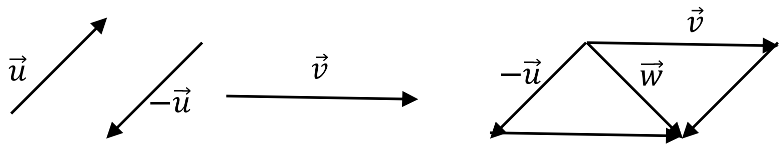
a - Addition, soustraction, multiplication

* La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ noté $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur $\vec{w}$ obtenu par ' la règle du parallélogramme



Règle : on prend un vecteur équipollent à $\vec{u}$ (vecteur de support // à $\vec{u}$, de même module et de même sens) qu'on ramène à l'extrémité de $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur joignant l'origine de $\vec{v}$ à l'extrémité de $\vec{u}$.

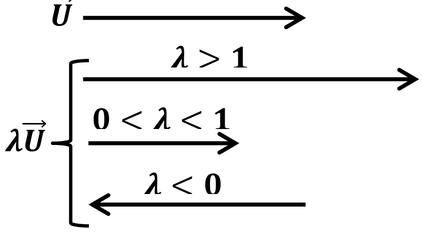
* La loi de soustraction est définit de la même façon : $\vec{w} = (-\vec{u}) + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$



* La multiplication par un scalaire est distributive : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

* Produit externe

C'est la multiplication d'un vecteur par un scalaire réel, le résultat est un vecteur colinéaire au vecteur initial.



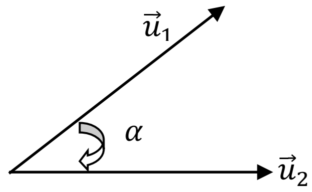
- Si λ est positif le sens du vecteur est inchangé ; et il change s'il est négatif.
- Si |λ| est plus grand que 1, le module du vecteur est augmenté (le vecteur s'allonge) et inversement si |λ| est plus petit que 1.

b- Produit scalaire :

1- Définition

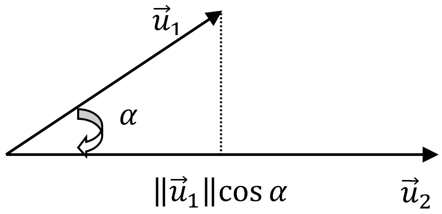
Soit $\vec{u}_1$et $\vec{u}_2$ deus vecteurs non nuls et α est l'angle entre eux, le produit scalaire de ces deux vecteurs est défini par :

$$\vec{u}_1.\vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\| \ \cos\alpha$$



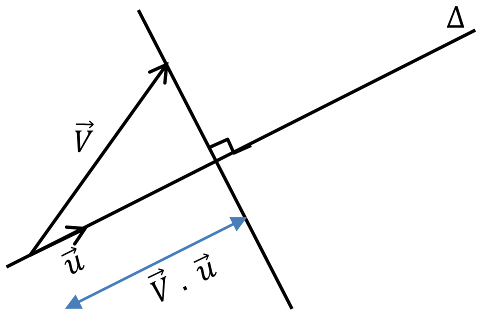
Par définition, le produit scalaire est un nombre p :

$$p = \|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\| \ \cos\alpha$$
$$= \|\vec{u}_1\| Proj_{/\vec{u}_1}(\vec{u}_2) = \|\vec{u}_2\| Proj_{/\vec{u}_2}(\vec{u}_1)$$



La projection d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ est :

$$Proj_{/\Delta}(\vec{v}) = \vec{v}\,.\vec{u}$$



2- Propriétés :

- Commutativité $\quad \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}\,.\vec{u}$
- Distributivité/ addition $\quad \vec{v}.(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{v}.\vec{u}_1 + \vec{v}.\vec{u}_2$
- Associativité pour le produit externe $\lambda\,(\vec{u}_1.\vec{u}_2) = (\lambda\vec{u}_1).\vec{u}_2$
- $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 = 0 \quad ou \quad \vec{v}_2 = \vec{0} \quad ou\, \vec{v}_1\ perpendiculaire\, à\, \vec{v}_2$
- si $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1.\vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2|\cos(0) \ = \ \|\vec{v}_1\|^2$

Donc on retrouve les résultats pour un repère orthonormé :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{0}$$

3- Représentation analytique :

Dans le repère orthonormé $\Re\left(O, \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ \text{ et } \quad \vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

x_i, y_j, z_k sont les composantes des vecteures $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans le repère $\Re$.

Le produit scalaire : $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$

$$= x_1.x_2(\vec{i}.\vec{i}) + y_1.y_2(\vec{j}.\vec{j}) + z_1.z_2(\vec{k}.\vec{k})$$

Comme le repère est orthonormé on a : $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$;

en particulier si $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $\quad \vec{v}_1.\vec{v}_1 = x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1 = |\vec{v}_1|^2$

Le module du vecteur $\vec{v}_1$: $\quad |\vec{v}_1| = \sqrt{x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1}$

c- Produit vectoriel :

1- Définition

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, est un **vecteur** $\vec{W}$ noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ caractérisé par :

* Direction : $\vec{W}$ est perpendiculaires au plan des deux vecteurs $\vec{U}$et $\vec{V}$, en particulier $\vec{W} \perp \vec{U}$ et $\vec{W} \perp \vec{V}$

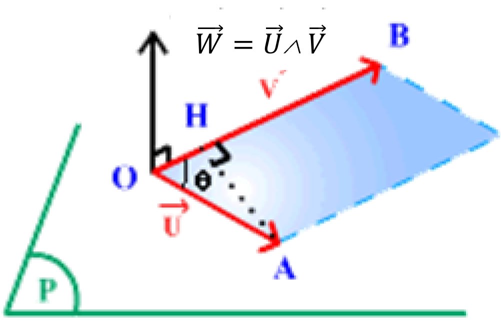
* Sens : est tel que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ un trièdre direct

* Norme : $\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\| \left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$

2- Forme géométrique

$\|\vec{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ représentants des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$. En effet, partageons le parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ en deux triangles semblables :

$$AH = OA \sin\theta = \|\vec{U}\|\left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$$



$$Aire\ OAB = \frac{base\ \times hauteur}{2} = \frac{OB\ \times AH}{2} = \frac{1}{2} OA\,.\,OB\ \sin\theta$$

avec donc l'aire du parallélogramme devient :

$$Aire\ OABC = 2\ Aire\ OAB = OB\,.\,OA\ \sin\theta = B\ \times AH = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\left|\sin(\vec{U}, \vec{V})\right|$$

3- Forme analytique

Dans le repère orthonormé $\Re(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \text{ et } \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\,, \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}\,, \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Considérons dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ deux vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ tels que : $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\overrightarrow{v'} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini par la relation :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{v'} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} \wedge \overrightarrow{v'} = (yz' - zy')\vec{\imath} - (xz' - zx')\vec{\jmath} + (xy' - yx')\vec{k}}$$

<u>N. B</u> : Ne pas confondre produit vectoriel qui est un vecteur avec son module qui est un scalaire.

4 : Propriétés :

* Anticommutativité : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

* Distributivité : $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$

$$\lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = (\lambda\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge (\lambda\vec{V}_2)$$

Si $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$ avec $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_1 // \vec{V}_2$ autrement dit $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéaires

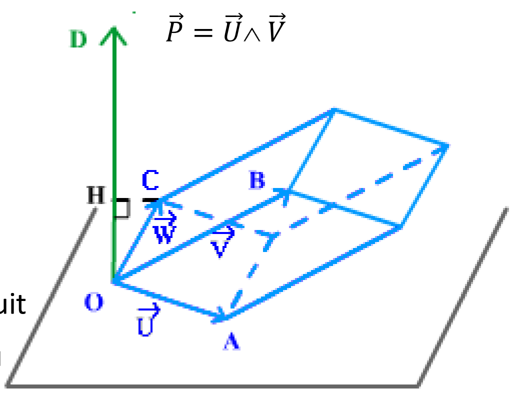
d- Produit mixte

1- Définition

On appelle **produit mixte** entre trois vecteurs $\vec{U},\vec{V}\,et\,\vec{W}$ le scalaire M défini par :

$$\boldsymbol{M = (\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})}$$

2- Forme géométrique



Posons $\vec{P} = \vec{U} \wedge \vec{V}$, $(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{P}.\vec{w} = \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}$

Si H désigne la projection orthogonale de C sur OD alors :

$$|(\vec{U},\vec{V},\vec{W})| = |\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC}| = \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OC}\|\cos(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC})$$
$$= \|\overrightarrow{OD}\|\|\overrightarrow{OH}\|$$

avec $\|\overrightarrow{OD}\| = \|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$: aire du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et donc : $|(\vec{U},\vec{V},\vec{W})|$ est le volume du parallélépipède d'arêtes $OA, OB\ et\ OC$

3- Forme analytique

Dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le produit mixte de trois vecteurs :

$$\vec{U} = U_x\vec{\imath} + U_y\vec{\jmath} + U_z\vec{k}\,;\, \vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k} \text{ et } \vec{W} = W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}$$

S'exprime par le scalaire : $M = \left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \vec{U}.\left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right)$

$$\boldsymbol{M} = \vec{\boldsymbol{U}}.\left(\vec{\boldsymbol{V}} \wedge \vec{\boldsymbol{W}}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{U_x} & \boldsymbol{U_y} & \boldsymbol{U_z} \\ \boldsymbol{V_x} & \boldsymbol{V_y} & \boldsymbol{V_z} \\ \boldsymbol{W_x} & \boldsymbol{W_y} & \boldsymbol{W_z} \end{vmatrix}$$

$$M = U_x\left(V_y W_z - V_z W_y\right) - U_y(V_x W_z - V_z W_x) + U_z\left(V_x W_y - V_y W_x\right)$$

Il est possible de retrouver ce résultat par le développement d'un déterminant d'ordre 3, dont les colonnes contiennent respectivement les composantes des vecteurs $\vec{U}, \vec{V}\, et\, \vec{W}$.

4- Propriétés

- Non commutativité : $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = -\left(\vec{W}, \vec{V}, \vec{U}\right)$

- Multi linéarité par rapport à chacun des vecteurs :

$$\left(\vec{U}_1 + \vec{U}_2, \vec{V}, \vec{W}\right) = \left(\vec{U}_1, \vec{V}, \vec{W}\right) + \left(\vec{U}_2, \vec{V}, \vec{W}\right)$$
$$\left(\alpha\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \alpha\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$$

- Le produit mixte est **invariant** par **permutation circulaire des trois vecteurs** :

$$\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \left(\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}\right) = \left(\vec{W}, \vec{U}, \vec{V}\right)$$

- Les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}\ et\ \vec{W}$ étant non nuls, le produit mixte $\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$ est nul, si et seulement si, les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}\ et\ \vec{W}$ sont **coplanaires.**

7- Dérivation

On considère un vecteur tel que ; $\vec{u} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ les vecteurs de base sont invariants avec le temps. On définit la **dérivée du vecteur** $\vec{u}$ par rapport au temps dans le repère $\Re$ par ; $\frac{d\vec{u}}{dt}_{/R} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Notation différentielle (variation élémentaire) : $d\vec{u} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

a- Dérivée du produit scalaire :

$$\frac{d(\vec{u}_1 . \vec{u}_2)}{dt} = \frac{d\vec{u}_1}{dt}.\vec{u}_2 + \vec{u}_1.\frac{d\vec{u}_2}{dt}$$

b- Dérivée d'un vecteur unitaire

Si $\vec{u}$ un vecteur unitaire $\quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = 1 \quad \vec{u}.\vec{u} = 1$

$$\frac{d(\vec{u} . \vec{u})}{dt} = \vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\vec{u} = 2\vec{u}\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}} \perp \frac{\boldsymbol{d\vec{u}}}{\boldsymbol{dt}}$$

Généralement la dérivée d'un vecteur de module constant est $\perp$ à ce vecteur.

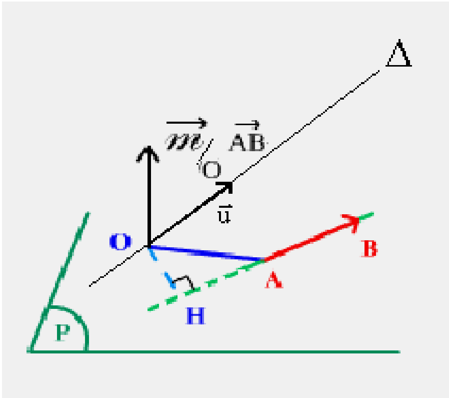
c- Dérivée du produit vectoriel ;

$$\frac{d(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

d- Dérivée du produit mixte ;

$$\frac{d(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\vec{v}_3)}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}_1}{dt};\vec{v}_2;\vec{v}_3\right) + \left(\vec{v}_1,\frac{d\vec{v}_2}{dt};\vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\frac{d\vec{v}_3}{dt}\right)$$

8- Moment d'un vecteur :



a- Moment par rapport à un point

Le Moment de vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est le vecteur : $\boldsymbol{\vec{m}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}}$

Le moment par rapport à O du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur $\perp$ au plan $(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{AB})$. Il est donc $\perp$ à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Module : $\|\vec{m}_O(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{OA}\|\ \|\overrightarrow{AB}\| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$

Avec $OH = \|\overrightarrow{OA}\| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$; O un point de la droite Δ du vecteur directeur $\vec{u}$ initaire

b- Moment par rapport à un axe

C'est la projection sur cet axe du moment par rapport à un point quelconque de cet axe :

$$\boldsymbol{m_{/\Delta}(\overrightarrow{AB}) = Proj_{/\Delta}\left(\vec{m}_{/O}(\overrightarrow{AB})\right) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB})\,.\,\vec{u} = (\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\,\vec{u})}$$ **Produit mixte**

<u>Attention</u> : Ne pas confondre moment par rapport à un point qui est un <u>vecteur</u> et moment par rapport à un axe qui est un <u>scalaire</u>.