Travail et Energie

I- Energie cinétique et travail :

1) cas simple :

Considérons la force $\vec{F}$ constante en grandeur et en direction et parallèle à Ox.

A $t = 0$, on a : $M(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{V}(V_{0x}, V_{0y}, V_{0z})$

D'après le **P.F.D** : $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad \Rightarrow \begin{cases} F_x = F = m\frac{dV_x}{dt} \\ F_y = 0 = m\frac{dV_y}{dt} \\ F_z = 0 = m\frac{dV_z}{dt} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{F}{m}t + V_{0x} \\ V_y = V_{0y} \\ V_z = V_{0z} \end{cases}$ (1)

$$\begin{cases} x = \frac{F}{2m}t^2 + V_{0x}t + x_0 \\ y = V_{0y}t + y_0 \\ z = V_{0z}t + z_0 \end{cases} \qquad (2)$$

(1) et (2) nous donne : $t = \frac{m}{F}(V_x + V_{0x})$ et $x = \frac{1}{2}\frac{Fm^2}{mF^2}(V_x + V_{0x})^2 + V_{0x}\frac{m}{F}(V_x + V_{0x}) + x_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(x - x_0) = \frac{1}{2}V_x^2 + \frac{1}{2}V_{0x}^2 \\ 0 = \frac{1}{2}V_y^2 + \frac{1}{2}V_{0y}^2 \\ 0 = \frac{1}{2}V_z^2 + \frac{1}{2}V_{0z}^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad F(x - x_0) = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2$$

Le second membre représente la variation d'une grandeur physique qui a la dimension d'une énergie. On l'appelle l'énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2}mV^2$; $\underset{t_1 \longrightarrow t_2}{\boldsymbol{\Delta E_C}} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_0^2$.

Le premier membre qui fait varier l'énergie cinétique est appelé le travail de la force $\vec{F}$.

2) cas général : Théorème de l'énergie cinétique :

a- Travail d'une force :

Soit M un point matériel (masse m) repéré à l'instant t par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ dans $R_0(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, ce point soumis à la force $\vec{F}$ effectue un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ entre t *et* $t + dt$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \text{ avec } \overrightarrow{OM'} = \vec{r}(t + dt) = \vec{r} + d\vec{r}$$

$$\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} \text{ (noté parfois } d\vec{l}\text{)}$$

La puissance $\boldsymbol{P}$ d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M de vitesse $\vec{V}$ dans un référentiel R est définie par : $\boldsymbol{P = \vec{F}.\vec{V}}$ (Par rapport à R) grandeur algébrique (watt). Le travail élémentaire δW de la force $\vec{F}$ entre $t\ et\ t + dt$ est :

$$\delta W = P\ dt = \vec{F}.\vec{V}dt = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

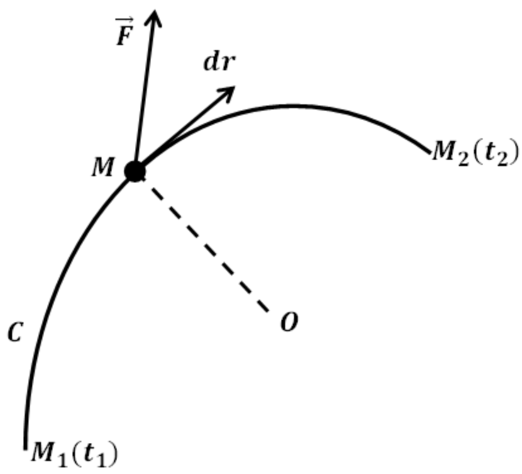
Le travail le long d'un arc fini C limité par $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ est:

$$W = P\ dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{V}dt = \int_{C} \vec{F}.d\vec{r} = \int_C \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

$W > 0 \Rightarrow \vec{F}\ et\ \vec{V}$ ont même sens : **Travail moteur**.

$W < 0 \Rightarrow \vec{F}\ et\ \vec{V}$ ont des sens opposés : **Travail résistant**

$W = 0 \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{V}$; Force $\perp$ au déplacement.



W est une intégrale curviligne qui dépend généralement du chemin suivi pour passer de M_1 à M_2, c'est la circulation du vecteur $\vec{F}$ attaché au point M, le long de l'arc M_1M_2.

b- Energie cinétique :

La variation d'énergie est toujours liée à la variation d'un paramètre :

- La vitesse d'un point matériel dans un référentiel donné : ***Energie cinétique***
- La nature des composés chimique en présence : ***énergie chimique***.

Tout corps en mouvement peut fournir du travail lorsque sa vitesse diminue (un marteau tombant enfonce un clou). Le corps mobile fournit du travail on dit qu'il possède de l'énergie cinétique. $\delta W = P\ dt = \vec{F}.\vec{V}dt = \vec{F}.d\vec{r} = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}dt = m\vec{V}.d\vec{V}$

$$dW = m\vec{V}.d\vec{V} = \frac{1}{2}md\vec{V}^2 = \frac{1}{2}mdV^2$$

V étant la vitesse numérique du mobile à l'instant t.

Définition : l’énergie cinétique d’une particule pour un repère déterminé est égale au demi produit de sa masse m par le carré de sa vitesse:

$E_C = \frac{1}{2} m V^2$ $\quad m$ supposée constante, V vitesse numérique.

L’énergie cinétique est une grandeur scalaire ayant même équation dimensionnelle que le travail : ML^2T^{-2} (Joule) m en kg et V en m/s.

c- Théorème de l’énergie cinétique :

Supposons que M à un déplacement infinitésimal $d\vec{r} = \vec{V}dt \quad \Rightarrow \quad \delta W = \vec{F}.\vec{V}dt$

Or $\vec{F} = m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{V}}{dx}$ d’après le PFD dans un repère Galiléen

$$\Rightarrow \quad \delta W = m\frac{d\vec{V}}{dt}\vec{V}dt = \frac{1}{2}m\frac{d\vec{V}^2}{dt} = dE_C = \frac{1}{2}md\vec{V}^2$$

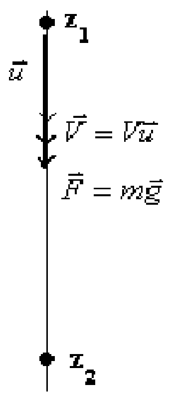
$$W = \int \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\frac{d\vec{V}^2}{dt}dt = \left[\frac{1}{2}m\vec{V}^2\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$\underset{\substack{M_1\to M_2 \\ t_1\to t_2}}{W} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{V}dt = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 \quad \Rightarrow \quad \underset{\substack{M_1\to M_2 \\ t_1\to t_2}}{W} = \Delta E_C$$

La *variation de l’énergie cinétique* d’un point matériel entre t_1 et t_2 dans un référentiel galiléen est égale au *travail de toutes les forces appliquées* au cours de son déplacement de M_1 à M_2. Ce théorème permet de connaître la vitesse V sans passer par la trajectoire.

Exemple de la chute libre :

$\vec{F} = m\vec{g} = mg\vec{u}$; $\vec{V} = V\vec{u}\frac{dz}{dt}\vec{u}$



Le travail de la force de pesanteur quand M se déplace entre $M_1(x_1, y_2, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{g}\vec{V}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} mgV\,dt \int_{t_1}^{t_2} mg\frac{dz}{dt}dt = mg(z_2 - z_1)$$

$$\underset{t_1 \longrightarrow t_2}{\boldsymbol{\Delta E_C}} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = mg(z_2 - z_1)$$