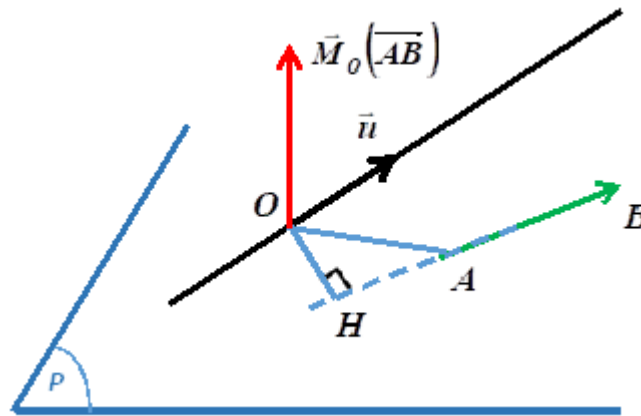


MOMENT DE FORCE, MOMENT CINETIQUE D'UN POINT MATERIEL ET THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

1°) Moment d'un vecteur :

a- Moment par rapport à un point



Le Moment de vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est le vecteur :

$$\vec{M}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le moment par rapport à O du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur $\perp$ au plan $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$. Il est donc $\perp$ à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$. Son module est donné par :

$$\|\vec{M}_O(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{AB}\| |\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})|$$

Avec $OH = \|\overrightarrow{OA}\| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})$ et O un point de la droite Δ du vecteur unitaire directeur $\vec{u}$.

b- Moment par rapport à un axe

C'est la projection sur cet axe du moment par rapport à un point quelconque de cet axe.

$$M_{/\Delta}(\overrightarrow{AB}) = \text{Proj}_{/\Delta}(\vec{M}_O(\overrightarrow{AB})) = (\vec{M}_O(\overrightarrow{AB})) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u}$$

C'est un produit mixte

Attention : Ne pas confondre moment par rapport à un point qui est un vecteur et moment par rapport à un axe qui est un scalaire.

Considérons le vecteur : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cy - bz = cy_0 - bz_0 = Cte \\ cx - az = cx_0 - az_0 = Cte \\ bx - ay = bx_0 - ay_0 = Cte \end{vmatrix}$

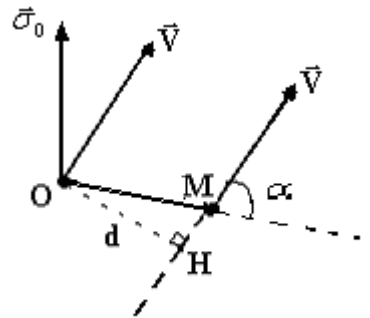
Avec $\vec{P}$ est la quantité de mouvement.

Donc le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ noté $\vec{\sigma}_O$ appelé moment cinétique de M par rapport au point O fixe est un vecteur constant pour un point matériel M isolé.

Le vecteur moment cinétique en un point O d'un point matériel isolé se conserve.

$$\|\vec{\sigma}_O\| = m \|\overrightarrow{OM}\| \|\vec{V}\| \sin \alpha$$

$$OH = OM \sin \alpha = d$$



2°) Généralisation au cas d'un point matériel soumis à une force.

a) Variation de la quantité du mouvement $\vec{P}$.

La quantité du mouvement est définie par $\vec{P} = m \vec{V}$ et l'accélération par $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

D'après le PFD : $\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ (m étant la masse)

Théorème de la quantité du mouvement :

“ La force est la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité du mouvement $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ dans un référentiel galiléen ”.

b) Variation du moment cinétique :

Le moment cinétique en un point fixe O dans le référentiel R, d'un point matériel M de masse m, de vecteur vitesse $\vec{V}$ est :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

De part sa définition, ce moment cinétique ne dépend que de la composante du vecteur vitesse orthogonal au rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ il traduit un effet de rotation autour du point O.

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique :

« La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel, en un point fixe O d'un référentiel galiléen est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur ce point ».

Le théorème reste valable si on, calcule $\vec{\sigma}$ et $\vec{M}(\vec{F})$ par rapport à un autre point fixe A.

En effet, si on calcule ce moment on aura :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} = \vec{\sigma}_O - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} - \overrightarrow{OA} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) - \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

OA = Cte puisque O et A sont fixes.