

FORCES NEWTONIENNES

Champ de gravitation- Forces centrales

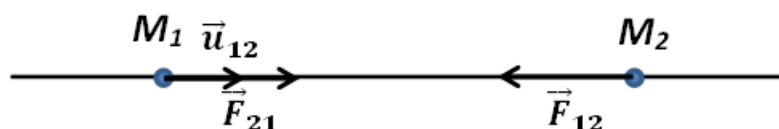
1^{ère} partie

I - Loi de NEWTON

1) Définition

La **force de newton** représente les interactions entre deux masses supposées ponctuelles. Elle possède les caractéristiques suivantes:

- * Elle est **radiale** : dirigée suivant la droite joignant les deux particules M_1 et M_2



- * Elle satisfait au principe de l'action et de la réaction :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{Principe des interactions réciproques}$$

- * Son intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance entre les deux particules :

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{|Cte|}{r_{12}^2}$$

2) Loi de Newton

Les interactions entre deux masses ponctuelles M_1 ; M_2 représentées par $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$

sont tel que:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

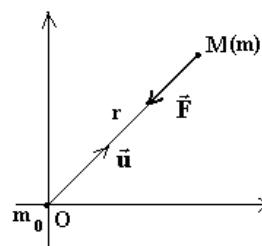
G est la constante de gravitation universelle $G = 6,6710^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$

II - Energie potentielle attaché à la loi de Newton :

Soit la force $\vec{F}$ de Newton exercée par la masse m_0 placée en O sur la masse m placée en M tel que : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{u}$

La force de Newton est conservative elle dérive d'un potentiel

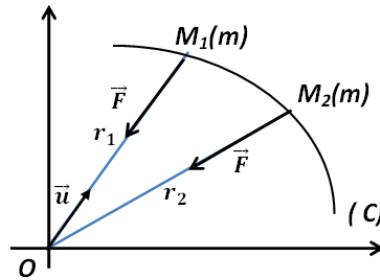
$$E_p = -\frac{Gm_0m}{r}.$$



$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}E_P} = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{u} \Rightarrow E_P = -\frac{Gm_0m}{r} + Cte$$

$$\text{et } \vec{F} = Gm_0m\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Considérons la masse m_1 placée en M_1 à la distance r_1 de O et m_0 fixe en O ; en déplaçant la masse m_1 depuis M_1 à M_2 située à la distance r_2 de O .



Le travail de la force $\vec{F}$ est : $W = \int_{M_1M_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = - \int \overrightarrow{\text{grad}E_P} \cdot d\overrightarrow{OM}$

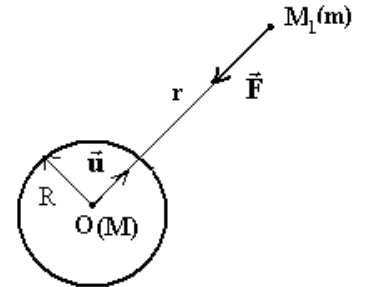
Or $dE_P = -\overrightarrow{\text{grad}E_P} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Diminution de l'énergie potentielle

$$\Rightarrow W = - \int_{M_1M_2} dE_P = E_{P1} - E_{P2} = -\frac{Gm_0m_1}{r_1} + \frac{Gm_0m_1}{r_2} = Gm_0m_1 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

III - Pesanteur terrestre

1) **La force d'attraction** qu'exerce la terre supposée ponctuelle de masse M sur une masse m placée à la distance r du centre de la terre est : $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u} = m\vec{g}$

L'attraction terrestre est un cas particulier de l'attraction universelle des masses.



2/ **L'accélération de la pesanteur $\vec{g}$** est donnée par : $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$ avec r la distance du centre de la terre au point matériel $M_1(m)$

*Variation de g avec l'altitude

Au niveau du sol (à la surface de la terre : altitude zéro) l'accélération est : $g_0 = \frac{GM}{R^2}$

Supposons qu'on ait une variation h petite devant .

$$g = g_0 + dg = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}$$

$$\text{Si } h \ll R \Rightarrow \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 - 2\frac{h}{R} + \dots$$

$$g = g_0 + dg = g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right) \Rightarrow \frac{dg}{g_0} \approx \frac{-2h}{R}$$

g diminue avec l'altitude mais il faut une grande variation d'altitude pour avoir une variation notable de g

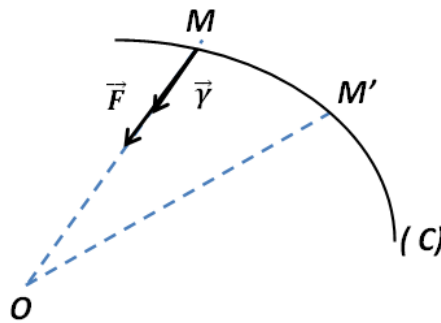
$$\text{Plus généralement : } g = \frac{GM}{r^2} \text{ et } g_0 = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2}$$

Lorsqu'on s'éleve au-dessus du niveau du sol la variation de g est inversement proportionnelle à r^2 .

IV - Mouvement à accélération centrale :

1) Définition

On dit que l'**accélération est centrale** lorsque le support du vecteur accélération du mobile M passe constamment par un point fixe appelé centre des accélérations $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0}$
Comme $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ dans un repère Galiléen, Le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ étant constamment collinaires donc on a un mouvement à accélération centrale chaque fois que la force qui agit sur le mobile M passe par un point fixe.



Exemple : Mouvement des planètes et des satellites artificiels, des électrons dans l'atome etc.

2) Propriétés

a- Le moment cinématique est constant

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_{/O}(\vec{F})$$

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} \text{ est un vecteur constant}$$

b- La trajectoire est plane

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} \text{ est constant} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \vec{C} \Rightarrow \vec{C} \perp \overrightarrow{OM} \quad \forall t$$

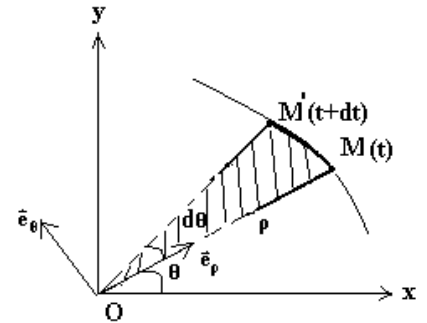
Le vecteur $\vec{C}$ étant constant ; d'après la définition du produit vectoriel, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont constamment dans le plan perpendiculaire en O à $\vec{C}$ par suite ce plan contient la trajectoire et le centre des accélérations $O \Leftrightarrow M$ se déplace constamment dans le plan perpendiculaire en O à $\vec{C}$: **Trajectoire plane**

c- Le mouvement s'effectue suivant la loi des aires

En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ et $\vec{V} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} = \rho^2 \dot{\theta} \vec{k} : \text{Constante des aires.}$$

Examinons l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre l'instant t et l'instant $t + dt$; entre ces deux instants le rayon vecteur passe de $\overrightarrow{OM}$ à $\overrightarrow{OM'}$, en effectuant une rotation d'angle $d\theta$ l'aire hachurée dS est approchée par celle du triangle OMM' dont la mesure est :



$$dS = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} dt| = \frac{1}{2} C dt$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{2} \Rightarrow S(t) = \frac{C}{2} t + S_0 = \frac{\rho^2 \dot{\theta}}{2} t + S_0$$

$S_0 = 0$ si l'axe de référence Ox coïncide avec $\overrightarrow{OM}$ à $t = 0$.

$$\text{Si à } t = 0, S(t) = 0 \Rightarrow S_0 = -\frac{C}{2} t_0 \Rightarrow S(t) = \frac{C}{2} (t - t_0)$$

Le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

1^{ère} Loi de KEPLER :

L'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ Croît proportionnellement au temps

C : Constante des aires

$\frac{C}{2}$: Vitesse aréolaire vitesse de variation de l'aire S ($S_0 = 0$ et Ox coïncidant avec $\overrightarrow{OM}_0$ à $t = 0$)

$$S = \frac{C}{2} t : \text{Loi des aires}$$

Théorème démontré à partir de l'hypothèse du mouvement à accélération central. Historiquement, cette relation est une loi qui a été découverte par Kepler à partir de relevés de mesure sans que l'on ait encore soupçonné la notion d'accélérations centrale (1609).

2^{ème} loi de Kepler :

La trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale est une trajectoire plane décrite selon la loi des aires