FORCFS NEUTONIENNES

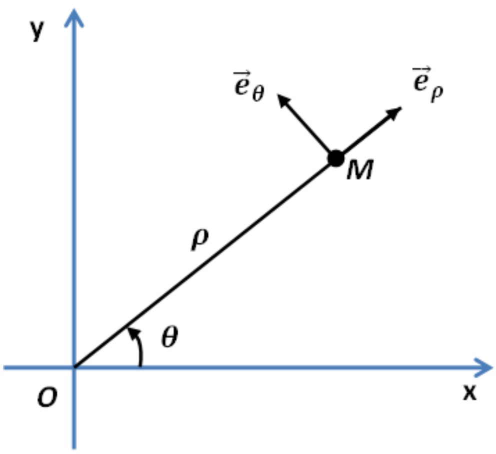
Champ de gravitation- Forces centrales

2ème partie

Formules de Binet

Ce sont des formules qui donnent l'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction de l'équation polaire de la trajectoire $\rho = f(\theta)$ et la constante des aires $C = \rho^2\dot{\theta}$

a- <u>Première formule de Binet relative à la vitesse</u>.



En coordonnées polaires :$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho$ et $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$ or $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

D'après la loi des aires $C = \rho^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}$

$\Rightarrow\; V^2 = \frac{C^2}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\frac{C^2}{\rho^4}$ Or $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}$

$\Rightarrow \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]^2$

On pose $u = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta}$

$\Rightarrow\; V^2 = \frac{C^2}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\frac{C^2}{\rho^4} = C^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + C^2u^2$

$$V^2 == C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$ **1ère loi de BINET**

b- <u>Deuxième formule de Binet relative à l'accélération</u>

En coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = \gamma_\rho\vec{e}_\rho + \gamma_\theta\vec{e}_\theta$$

$$\gamma_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = \frac{1}{\rho}\frac{dC}{dt}$$

Or $C = \rho^2\dot{\theta} = Cte \;\;\Rightarrow\;\; \frac{dC}{dt} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \gamma_\theta = 0$ évident car mouvement à accélération centrale

Donc $\gamma = \gamma_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\dot{\theta}^2$. En posant $u = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2} = Cu^2$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}Cu^2 = -C\frac{du}{d\theta}$$

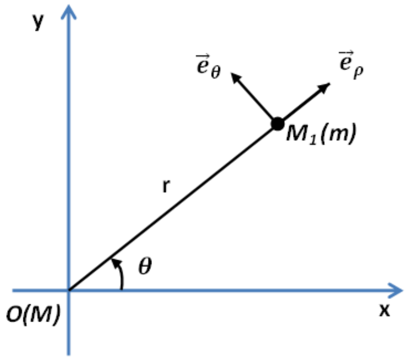
$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -C^2\frac{d^2u}{d\theta^2}u^2$$

$$\gamma = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{(Cu^2)^2}{u}$$

$$\gamma = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$ **2ème loi de BINET**

4) Trajectoire d'un mobile soumis à un champ Newtonien en $\left(\frac{1}{r^2}\right)$

On considère le champ d'attraction universelle exercée par une masse M en O sur une particule M_1 de masse m située à une distance r de O.



L'accélération est : $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_\rho$; G constante de gravitation universelle.

Par projection sur l'axe polaire on a :

$$\gamma = g = --G\frac{M}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = -C^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -GMu^2$$

$\Rightarrow \ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$ Equation différentielle du second ordre en u par rapport à θ.

* **Equation sans second membre (ESSM) :** $u'' + u = 0$

$\Rightarrow$ l'équation caractéristique : $\lambda^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$$\Rightarrow \ u_1(\theta) = A_1e^{i\theta} + B_1e^{-i\theta} = A\cos(\theta - \theta_0)$$

* **Equation avec second membre (EASM) :** $u'' + u = \frac{GM}{C^2} = Cte \ \Rightarrow \ u_2 = Cte = \frac{GM}{C^2}$

Donc la solution générale de l'équation complète :

$$u(\theta) = u_1 + u_2 = \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{C^2}$$

θ_0 est déterminé par les conditions initiales ; on peut les choisir de sorte que $\theta_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = A\cos(\theta) + \frac{GM}{C^2} = \frac{GM}{C^2}\left(1 + \frac{AC^2}{GM}\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad r(\theta) = \frac{1}{\frac{GM}{C^2}\left(1+\frac{AC^2}{GM}\cos\theta\right)} = \frac{\frac{C^2}{GM}}{1+\frac{AC^2}{GM}\cos\theta}$$

On pose $P = \frac{C^2}{GM}$ et $e = \frac{AC^2}{GM}$ $\Rightarrow$ $r = \frac{P}{1+e\cos\theta}$ c'est l'équation **d'une conique d'excentricité *e* et de paramètre *P*** (Parabole, Hyperbole ou Ellipse)

- ✓ Si $e < 1$: la conique est une **ellipse**
- ✓ Si $e = 1$: la conique est une **parabole**
- ✓ Si $e > 1$: la conique est une **hyperbole**

V - Etude dynamique des champs newtoniens :

La force d'attraction : $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r$

- La trajectoire est plane.
- La trajectoire est une conique.
- La trajectoire est décrite suivant la loi des aires $S = \frac{C}{2}t$.
- Le moment cinétique reste constant au cours du mouvement $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{Cte}$.

1) Energie potentielle :

Le champ Newtonien est conservatif : la force $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r$ dérive d'un potentiel $E_P = -\frac{GmM}{r}$ comme $r = \frac{P}{1+e\cos\theta}$ $\Rightarrow$ $E_P = -GmM\left(\frac{1+e\cos\theta}{P}\right)$

2) Energie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2(u'^2 + u^2) \text{ or } u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{P} \Rightarrow u' = \frac{du}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{P}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}mC^2\left[\frac{e^2\sin^2\theta}{P^2} + \frac{(1+e\cos\theta)^2}{P^2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_C = \frac{mC^2}{2P^2}[1 + e^2 + 2e\cos\theta]$$

3) Energie mécanique :

$$E = E_C + E_P = -GmM\left(\frac{1+e\cos\theta}{P}\right) + \frac{mC^2}{2P^2}[1 + e^2 + 2e\cos\theta]$$

On sait que $P = \frac{C^2}{GM} \Rightarrow \frac{mC^2}{P} = GmM \Rightarrow E = \frac{GmM}{P}\left[-1 - e\cos\theta + \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} + e\cos\theta\right]$

$$\Rightarrow E = -\frac{GmM}{2P}[1 - e^2] = Cte$$

- ✓ Si $e < 1$ la trajectoire est une ellipse et l'énergie mécanique $E < 0$.
- ✓ Sachant que $E = E_C + E_P = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 < \frac{GmM}{r} \Rightarrow |E_C| < |E_P|$.
- ✓ Si $e = 1$ La trajectoire est une parabole $\Rightarrow E = 0 \Rightarrow |E_C| = |E_P|$.
- ✓ Si $e > 1$ La trajectoire est une hyperbole et $E > 0 \Rightarrow |E_C| > |E_P|$.