Exercice 1

Une particule M de masse m, décrit sous l'action d'une force centrale de centre O, une courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$. On appelle f la mesure algébrique de $\vec{f}$ sur l'axe $\overrightarrow{OM}$ orienté de O vers M. On appelle C la constante des aires.

1. Etablir la relation $f = f(r, m, C)$. On utilisera successivement :

   a – La formule de Binet relative à l'accélération

   b – La formule de Binet relative à la vitesse et le théorème de l'énergie cinétique.
2. Etudier les cas particuliers suivants :

$$r = 2a\cos\theta \qquad r = \frac{P}{1+\cos\theta}$$

Exercice 2:

Dans tout le problème, on travaillera dans la base des coordonnées polaires $(\vec{e}_r\,,\ \vec{e}_\theta)$. On considère un point matériel M de masse m subissant l'effet d'une accélération centrale γ.

1. Énoncer (sans démonstration) toutes les propriétés du mouvement du point M. Donner les expressions de la constante des aires C et du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ en fonction de C.

2. Établir les formules de Binet relatives à la vitesse et à l'accélération du point M :

$V = C\sqrt{u^2 + u'^2}$ et $\gamma = -C^2u^2(u" + u)$ où $= \frac{1}{r}$, $u' = \frac{du}{d\theta}$, $u" = \frac{d^2u}{d\theta^2}$ et C la constante des aires

3. Dans la suite, on considérera que le module de la vitesse du point M est :

$V = \frac{K}{r}$, où Kest une constante positive. Montrer que la loi de force est donnée par : $F(r) = -\frac{m\,K^2}{r^3}$

4. Déterminer l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive la force F. On prend $U(r \to \infty) = 0$

5. Écrire l'équation de conservation de l'énergie mécanique E et montrer que $E = 0$.