

Solution exercice 1

On connaît l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta)$ et on veut déterminer la loi de force $f(r)$

1/ a - On utilise alors la 2^{ème} formule de Binet :

$$\gamma = -C^2 u^2 (u'' + u) \text{ où } u = \frac{1}{r} \text{ et } C = r^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \gamma = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

Et d'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{f} = m\vec{\gamma}$

$$\text{Donc : } f(r) = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

b - La formule de Binet relative à la vitesse s'écrit :

$$V^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $dW = dE_c$

On a : $dW = \vec{f} \cdot d\vec{r} = f dr$ puisque $\vec{f}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires.

$$f dr = d \left(\frac{1}{2} m V^2 \right) = m V dV$$

$$\text{Donc } f = mV \frac{dV}{dr} = mV \frac{dV}{du} \times \frac{du}{dr} = mV \frac{dV}{du} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = -mV u^2 \frac{dV}{du} = -\frac{mu^2}{2} \frac{dV^2}{du}$$

On utilisera La formule de Binet relative à la vitesse :

$$f = -\frac{mu^2 C^2}{2} \left[2u + 2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d \left(\frac{du}{d\theta} \right)}{du} \right] = -mu^2 C^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right]$$

$$\Rightarrow f(r) = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad \text{Résultat conforme à a)}$$

2/ Etude des cas suivants :

$$* r = 2a \cos \theta \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a \cos \theta} \Rightarrow u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{2a \cdot \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow u'' = \frac{1}{2a \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{2a \cdot \cos^2 \theta} \Rightarrow \gamma = -\frac{C^2}{2a^2 \cdot \cos^2 \theta} \left(\frac{1}{2a \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{a \cdot \cos^3 \theta} + \frac{1}{2a \cos \theta} \right)$$

$$\Rightarrow \gamma = -\frac{C^2}{4a^3 \cdot \cos^5 \theta} \Rightarrow F = m\gamma = -\frac{mC^2}{4a^3 \cdot \cos^5 \theta}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{8mC^2 a^2}{r^5} \text{ (Force attractive en } \frac{1}{r^5})$$

$$* r = \frac{P}{1+\cos \theta} \Rightarrow u = \frac{1+\cos \theta}{P} \Rightarrow u' = -\frac{\sin \theta}{P} \text{ et } u'' = -\frac{\cos \theta}{P} \Rightarrow$$

$$\gamma = -C^2 \left(\frac{1+\cos \theta}{P} \right)^2 \left(-\frac{\cos \theta}{P} + \frac{1+\cos \theta}{P} \right)$$

$$\gamma = -\frac{C^2}{P^3} (1+\cos \theta)^2$$

$$\Rightarrow F = m\gamma = -\frac{mC^2}{P} \left(\frac{1+\cos \theta}{P} \right)^2 = -\frac{mC^2}{P} u^2$$

$$\Rightarrow F = -\frac{mC^2}{P} \cdot \frac{1}{r^2} \text{ (Force attractive en } \frac{1}{r^2})$$

Solution exercice 2

1/ Propriétés du mouvement du point M :

- Accélération centrale $\Rightarrow \vec{F} // \vec{OM} \Leftrightarrow \vec{F} \wedge \vec{OM} = 0$.
 - a- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{V}$ est constant
 - b- Le mouvement s'effectue dans un plan
 - c- Le mouvement s'effectue selon la loi des aires
- La constante des aires : $C = |\vec{OM} \wedge m\vec{V}|$

$$C = |r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)| = |r^2\dot{\theta}\vec{k}| \Rightarrow C = r^2\dot{\theta}$$

- Le moment cinétique : $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{V} = m\vec{C} \Rightarrow \sigma_0 = mC$

2/ Formules de Binet.

a- Vitesse : $\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \text{ avec } \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \Rightarrow V^2 = \frac{C^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \frac{C^2}{r^4}$$

On pose $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{C^2}{r^4} \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 \Rightarrow V = C\sqrt{u^2 + u'^2} \text{ avec } u' = \frac{du}{d\theta}$$

b- Accélération : $\vec{\gamma} = \gamma_r \vec{e}_r$ car $\frac{\vec{\gamma}}{OM} \Rightarrow \gamma_\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r \Rightarrow \gamma = \gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) \text{ d'après a/}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{C}{r^2} \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) = -C \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -C \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -C \dot{\theta} u'' = -C u^2 u''$$

$$\gamma = -C^2 u^2 u'' - \frac{1}{u} u^2 u'' \Rightarrow \gamma = -C^2 u^2 (u'' + u) \text{ avec } u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

3/ Dans le cas où le module de la vitesse : $V = \frac{K}{r}$, $K > 0$

D'après la 1^{ère} formule de Binet : $V = C\sqrt{u^2 + u'^2} = \frac{K}{r} = K \cdot u$

$$\Rightarrow C^2 u^2 + C^2 u'^2 = K^2 u^2 \Rightarrow u'^2 = \left(\frac{K^2}{C^2} - 1 \right) u^2 \Rightarrow u' = \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{K^2}{C^2} - 1} \cdot u \text{ en}$$

$$\text{dérivant / } \theta \Rightarrow u'' = \frac{du'}{d\theta} = \sqrt{\frac{K^2}{C^2} - 1} \cdot u' \Rightarrow u'' = \left(\frac{K^2}{C^2} - 1 \right) u$$

• On insère ce résultat dans la 2^{ème} formule de Binet : $\gamma = -C^2 u^2 (u'' + u)$

$$\Rightarrow \gamma = -C^2 u^2 \left(\left(\frac{K^2}{C^2} - 1 \right) u + u \right) = -K^2 \cdot u^3$$

$$\text{Or } F = m\gamma = -mK^2 \cdot u^3 \Rightarrow F = -\frac{mK^2}{r^3}$$

4/ $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U \Rightarrow F(r) = -\frac{dU}{dr} \Rightarrow U(r) = -\frac{mK}{2r^2} + Cte$

$$U(r \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow Cte = 0$$

5/ Energie totale :

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{mK^2}{2r^2}, \text{ Or } V = \frac{K}{r} \Rightarrow E = 0$$