

Enoncé

Considérons un point matériel M de masse m soumis à l'interaction gravitationnelle par une masse ponctuelle M_s située au point O . Soit le référentiel galiléen $R(O, XY Z)$.

1. Montrer que le moment cinétique est conservé. En déduire que le mouvement est plan. On choisit R tel que le mouvement de M soit dans le plan (OXY) . On utilise dans la suite de l'exercice les coordonnées polaires (ρ, φ) .
2. Calculer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p de M en prenant

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} E_p(\rho) = 0$$

En déduire que l'énergie mécanique de M est donnée par : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{mC^2}{2\rho^2} + \frac{K}{\rho}$, en explicitant l'expression de K et de la constante des aires C

3. On pose $\rho = \frac{1}{u}$. Retrouver l'expression de $E_m = f(u, \frac{du}{d\varphi})$.
4. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement en $u(\varphi)$ est :

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2}$$

5. Résoudre l'équation du mouvement en $u(\varphi)$. En déduire que l'équation du mouvement en $\rho(\varphi)$ est de la forme :

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Quelle est la nature de la trajectoire en précisant les expressions de P et de e ?

6. En utilisant l'expression de E_m en fonction de $u(\varphi)$, montrer que :

$$E_m = \frac{GM_s m}{2P} (e^2 - 1)$$

7. Discuter la nature de la trajectoire en fonction de e et déduire le signe de E_m pour chaque type de trajectoire.