

Corrigé

Le point M est soumis à l'interaction gravitationnelle.

1. La seule force à laquelle M est soumise est une force centrale, alors son moment par rapport à O est nul étant donné que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\vec{F}$. Le théorème du moment cinétique permet d'écrire :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}(M/R) \right|_R = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{\sigma}_O(M/R) = Cte$$

Comme le moment cinétique est constamment perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$, cela implique que le mouvement de M se déroule dans le plan perpendiculaire au moment cinétique.

2. Calculons la vitesse $\vec{V}(M/R)$, sachant que $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

$$\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Ce qui donne pour l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$. L'énergie potentielle associée à l'interaction gravitationnelle est :

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{GM_s m}{\rho^2} \vec{e}_\rho \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi) = \frac{GM_s m}{\rho^2} d\rho$$
$$\Rightarrow E_p = -\frac{GM_s m}{\rho} + Cte$$

et en prenant l'énergie potentielle de référence à l'infini nulle cela implique que la constante est nulle. Aussi, l'énergie mécanique est égale :

$$E_m = \frac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{GM_s m}{\rho}$$

Comme $|\vec{\sigma}_O(M/R)| = |\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)| = m\rho^2 \dot{\varphi}$, cela donne :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \frac{\rho^4 \dot{\varphi}^2}{\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho}$$
$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2(M/R)}{m\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho}$$
$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{\rho^2} - \frac{GM_s m}{\rho}$$

avec $C = \rho^2 \dot{\varphi}$ et $K = -GM_s m$

3. On pose $\rho = \frac{1}{u}$, ce qui implique :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\rho^2 \dot{\varphi} \frac{du}{d\varphi} = -C \frac{du}{d\varphi}$$

ce qui donne pour l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} mC^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \frac{mC^2}{2} u^2 + Ku$$

4. Comme l'énergie mécanique ne dépend pas explicitement du temps, elle est conservée. Alors :

$$\frac{dE_m}{dt} = mC^2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \dot{\varphi} + mC^2 u \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} + K \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} mC^2 \frac{du}{d\varphi} \left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{K}{mC^2} \right] = 0$$

$$\dot{\varphi} \neq 0 ; \frac{du}{d\varphi} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{K}{mC^2} = \frac{GM_s}{C^2}$$

qui est une équation différentielle de second ordre à coefficients constants avec second membre. La solution générale $u(\varphi)$ et la somme de la solution sans second membre, u_{ESSM} , et d'une solution particulière u_p .

5. Calculons la solution sans second membre :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i$ et donc la solution est :

$$u_{ESSM} = A_1 e^{i\varphi} + A_2 e^{-i\varphi} = A \cos(\varphi - \varphi_0)$$

On vérifie bien que $u_p = +\frac{GM_s}{C^2}$ est une solution particulière. Ainsi la solution générale est :

$$u(\varphi) = u_{ESSM} + u_p = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{GM_s}{C^2}$$

où A et φ_0 sont définis à partir des conditions initiales. Comme $\rho = \frac{1}{u}$, nous obtenons :

$$\rho = \frac{\frac{C^2}{GM_s}}{1 + \frac{AC^2}{GM_s} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

ce qui donne $P = \frac{C^2}{GM_s}$ et $e = \frac{AC^2}{GM_s}$. La trajectoire est une conique de paramètre P et d'excentricité e .

6. L'expression de l'énergie mécanique devient en utilisant : $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e \sin(\varphi - \varphi_0)}{P}$

$$E_m = \frac{1}{2} mC^2 \frac{e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{P^2} + \frac{mC^2 (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))^2}{2P^2} - GM_s m \left(\frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P} \right)$$

$$E_m = \frac{mC^2}{2P^2} \left[e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) + 1 + e \cos(\varphi - \varphi_0) + e^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - GM_s m \left(\frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P} \right) \right]$$

$$E_m = \frac{GM_s m}{2P} (e^2 + 1 + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) - 2 - 2e \cos(\varphi - \varphi_0))$$

$$E_m = \frac{GM_s m}{2P} (e^2 - 1)$$

7. Nous avons vu que la nature de la trajectoire est une conique dont l'excentricité est e :

- ❖ Si $e = 0 \Rightarrow$ un cercle et $E_m < 0$, un état lié, ρ est constante.
- ❖ Si $0 < e < 1 \Rightarrow$ une ellipse $E_m < 0$, un état lié, $\rho \in [\rho_{min}, \rho_{max}]$
- ❖ Si $e = 1 \Rightarrow$ une parabole et $E_m = 0$, un état libre $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$
- ❖ Si $e > 1 \Rightarrow$ une hyperbole et $E_m > 0$, un état libre $\rho \in [\rho_{min}, +\infty[$