

II- Equations différentielles :

1- Equations différentielles du 1^{er} ordre :

C'est une équation de la forme :

$$f\left(x; y, y' = \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Ils existent plusieurs types dont on va citer deux :

a - Equations à variables séparables;

Une équation différentielle, du premier ordre $F(x, y, y') = 0$, à variables séparables peut se mettre sous la forme :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Elle peut s'écrire sous une forme plus symétrique :

$$f(x)dx = g(y)dy$$

* Résolution

Si $G(y)$ et $F(x)$ sont des primitives des fonctions $f(x)$ et $g(y)$, alors par intégration de chaque membre :

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$

On obtient l'équation cartésienne des courbes intégrales $G(y) = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$

Exemple :

$$xy + y' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x dx \Rightarrow \log|y| = -\frac{1}{2}x^2 + \log c \Rightarrow y = ke^{\frac{-x^2}{2}}$$

b- Equations homogènes

Toute équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{dx}$$

* Résolution

Pour résoudre cette équation on fait le changement de variable

$$\begin{aligned} t = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = tx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx} \\ \text{or } \frac{dy}{dx} &= f(t) \Rightarrow f(t) - t = x \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dt}{f(t) - t} \end{aligned}$$

On se ramène au cas précédent d'équations à variables séparables

Exemple :

$$y - 3xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{3x} = \frac{t}{3}$$

$$\text{donc } t + x \frac{dt}{dx} = \frac{t}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}t + x \frac{dt}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{2} \frac{dt}{t} \Rightarrow \log|x| = -\frac{3}{2} \log|t| + \log c$$

$$\text{donc } x = ct^{\frac{-3}{2}} \text{ et } y = tx = c\sqrt{t}$$

2/ Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

C'est une équation de la forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$ (1)

a, b et c sont des constantes ; $f(x)$ c'est le second membre.

On associe à l'équation avec second membre (**EASM**) (1), l'équation sans second membre (**ESSM**) (2), dite **équation homogène associée**.

$$\text{SGEASM} = \text{SGESSM} + \text{SPEASM} : y = y_1 + y_2$$

Ou $\text{SGEC} = \text{SGEHA} + \text{SPEC}$

a- Résolution de l'équation homogène associée ;

L'équation (2) homogène associée à (1) s'écrit ; $ay'' + by' + cy = 0$ (2)

Si y est solution de (2) y' l'est aussi, on cherche donc une solution qui a la même forme que sa dérivée première, ceci suggère de chercher des solutions de forme exponentielle $y_1 = e^{\lambda x}$.

Le problème est alors de trouver λ tel que $y_1 = e^{\lambda x}$ vérifie l'équation (2). En portant dans (2) :

$$y_1 = e^{\lambda x} ; y_1' = \lambda e^{\lambda x} \text{ et } y_1'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

On aura : $(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$; Or $e^{\lambda x} \neq 0 \forall x$.

On obtient l'équation algébrique dite caractéristique : $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Cette équation admet des racines suivant le signe du discriminant Δ .

1^{er} cas : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; On a deux racines réelles λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2). La solution de l'équation

(2) s'écrit alors : $y_1 = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}$

2^{ème} cas : $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{-b}{2a}$ est une racine double

$\Rightarrow$ La solution générale de (2) est donc : $y_1 = (A_1 + A_2 x) e^{\lambda_0 x}$

3^{ème} cas : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ On pose $\Delta' = -\Delta > 0$

On a deux racines complexes conjuguées : $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta'}}{2a} = -\alpha \pm i\beta$

La solution générale est donc : $y_1 = e^{-\alpha x} (A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x})$

Sachant que : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, La solution y_1 se met sous la forme :

$$y_1 = e^{-\alpha x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) = C e^{-\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$$

b- Recherche d'une solution particulière de (1)

1- Le second membre est une constante d, $\Rightarrow y_2 = \frac{C}{d} = cte$ est une solution particulière de

(1)

2- Le second membre est une fonction trigonométrique :

$$ay'' + by' + cy = \alpha \cos \omega x \text{ (ou } \alpha \sin \omega x) \quad (1)$$

On cherche une solution de : $ay'' + by' + cy = \alpha e^{i\omega x} \quad (1')$

La solution particulière de (1) sera la partie réelle (ou imaginaire) de (1').

On cherche une solution de (1') de la forme $A e^{i\omega x}$. On identifie partie réelle et partie imaginaire dans (1')

Une solution particulière de (1) est : $y_2 = C \cos(\beta x + \phi)$.