II - Energie potentielle - Forces conservatives :

1) *Définitions :*

- ***Energie potentielle*** : est une forme d'énergie qui dépend de la position d'un corps dans un champ de force ou plus généralement de la configuration du système.

Lorsqu'une force appliquée sur un point matériel ne dépend que de la position de ce point et de l'instant t considéré on dit que le point matériel se trouve dans un champ de force : $\vec{F} = \vec{F}(M,t)$.

Généralement on se limite à un champ de force indépendant du temps $\vec{F} = \vec{F}(M)$.

- **Une force $\vec{F}$ est conservative** s'il existe une fonction scalaire E_p tel que :

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$ on dit alors que la force dérive du potentiel ou énergie potentielle E_p.

$$\overrightarrow{grad}E_P = \begin{cases} \frac{\partial E_P}{\partial x} \\ \frac{\partial E_P}{\partial y} \\ \frac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} \quad ; \quad dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

$$dE_P = \overrightarrow{grad}E_P.d\overrightarrow{OM} = -\vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

En coordonnées polaires : $\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$

On peut définir une ***énergie potentielle*** $\boldsymbol{E_p(M)}$ d'un champ de force à condition que la circulation élémentaire $\vec{F}.d\vec{r}$ soit égale à une ***différentielle totale*** $dE_P = -\vec{F}.d\vec{r}$.

$$\boldsymbol{dE_P = \overrightarrow{grad}E_P.d\vec{r}}$$

<u>Rappel</u>

<u>Différentielle totale :</u>

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = Adx + Bdy + Cdz$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{xz} = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{yz} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Les dérivées croisées sont égales, la circulation est indépendante du chemin suivi entre M_1 et M_2 elle est nulle pour un chemin fermé : $dC = \overrightarrow{grad}U.d\vec{r} = dU$.

- **La force $\vec{F}$ est *__conservative__*** si $W(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F}.d\vec{r}$ est indépendant de la trajectoire curviligne AB et ne dépend que la position initiale A et finale B, alors ce travail est une différentielle totale $dE_P = -dW$.

$$A \overset{W}{\rightarrow} B = -[E_P(B) - E_P(A)] = -\int dE_P = \int_{AB} \vec{F}.d\vec{r} = -\int \overrightarrow{grad} E_P \,.d\vec{r}$$

Le travail est égal à la diminution de l'énergie potentielle entre A et B.

Si on a : $E_P(x,y,z)$ en $M(x,y,z)$ et $E_P + dE_P$ en $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

$$\Rightarrow \; dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

Et si F_x, F_y, F_z sont les composantes de $\vec{F}$:

$$M \overset{dW}{\longrightarrow} M' = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_P = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \qquad F_x = \frac{\partial E_P}{\partial x} \qquad\qquad F_y = \frac{\partial E_P}{\partial y} \qquad\qquad F_z = \frac{\partial E_P}{\partial z}$$

E_P nous donne $\vec{F}$ et inversement s$\vec{F}$i est conservative.

III - Conservation de l'énergie

Soit M un point matériel soumis à :

- ✓ Des forces conservatives $\vec{F}$ dérivant d'un potentiel E_P tel que $dE_P = -dW_c(\vec{F})$.
- ✓ Des forces non conservatives (dissipatives) $\vec{F}'$ ayant un travail $\delta W'_d(\vec{F}')$.

Le théorème d'Energie cinétique : $dE_C = dW_c(\vec{F}) + \delta W'_d(\vec{F}')$

$$\int_{AM} (\vec{F} + \vec{F}')d\vec{r} = \frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = E_{CM} - E_{CA} = A \overset{\Delta E_C}{\longrightarrow} M$$

$$= \int_{AM} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{AM} \vec{F}'.d\vec{r} = -A \overset{\Delta E_P}{\longrightarrow} M + W'_d(\vec{F}')$$

$(E_{CM} + E_{PM}) - (E_{CA} + E_{PA}) = A \overset{W'_d}{\longrightarrow} M$: Travail des forces non conservatives entre A et M.

Par définition le terme $E_C + E_P$ représente ***l'énergie mécanique*** E de la particule :

$$\boldsymbol{E = E_C + E_P}$$

Conclusion

Force agissant sur la particule	Uniquement conservative	Force non conservative $\vec{F}'$
Energie mécanique E	Constante du mouvement $\boldsymbol{E = E_A = cte}$	Variation de E $\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{W'_d}(\vec{\boldsymbol{F}}')$

IV- Position d'équilibre dans le cas de forces conservatives

M est en équilibre à la position $M_e \Rightarrow \vec{F}(M_e) = \vec{0}$

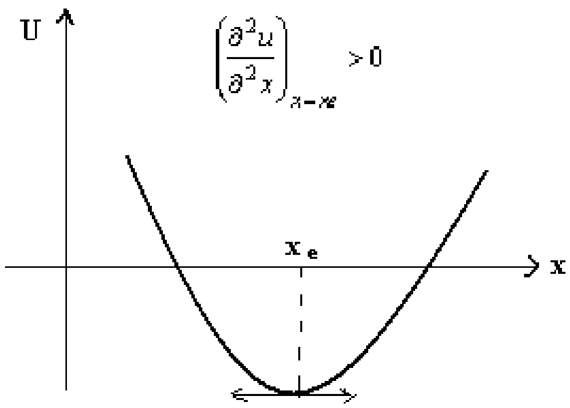
Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $U \Rightarrow \overrightarrow{grad}U\Big]_{M=M_e} = -\vec{F}\Big]_{M=M_e} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_e} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_e} = \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_e} = 0$$

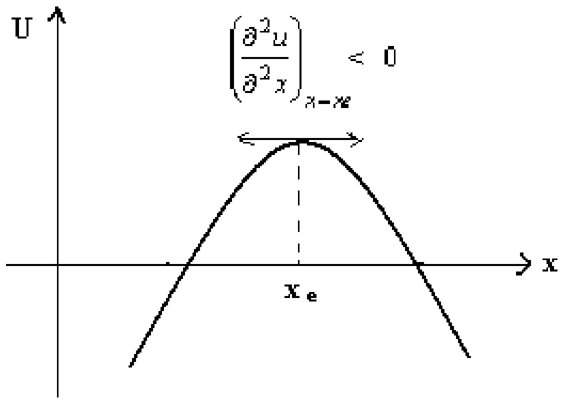
Si on a un problème à une dimension $F_x|_{x=x_e} = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_e} = 0$

L'équilibre nécessite une énergie potentielle extrémale.

Si on a par exemple une « cuvette » parabolique de potentiel ou «mont » de potentiel



Equilibre stable



Equilibre instable