Problème :

On considère le repère fixe $R\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ (repère absolu), $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant le plan horizontal. Soit une tige horizontale (OA) en mouvement autour de l'axe $\left(O\vec{k}\right)$ avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $R_1\left(O,\ \vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z\right)$ le repère lié à la tige (repère relatif) avec $\vec{e}_z=\vec{k}$. Soit un anneau assimilé à un point matériel M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (OA) et repéré par ses coordonnées polaires ρ et φ. (Voir figure). On a $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{e}_\rho$ et on suppose que $\rho(t=0)=\rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0)=0$.

1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point M par rapport à R
2. Déterminer l'énergie cinétique $E_c(M/R)$.
3. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(M/R)$ dont dérive le poids $\vec{P}$. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(M/R)$.
4. En plus du poids $\vec{P}$, le point M est soumis à la réaction $\vec{R}=R_\varphi\vec{e}_\varphi+R_z\vec{e}_z$. Par application du principe fondamental de la dynamique dans R, Calculer les composantes R_φ et R_z.
5. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans R, $\left[\frac{dE_m(M/R)}{dt}=\mathrm{P}(\vec{R}/R)\right]$ et en utilisant l'expression de R_φ, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M. ($\mathrm{P}(\vec{R}/R)$ étant la puissance de la réaction $\vec{R}$ dans le repère absolu R).
6. Déterminer la solution de cette équation différentielle en fonction de ρ_0 et ω.